Chapitre III

Jeux de stratégie

Ce chapitre aborde la question de la verbalisation et des raisonnements associés à des savoirs mathématiques dans les sociétés de tradition orale. On sait la place du raisonnement hypothético-déductif dans le développement des mathématiques depuis l'Antiquité. Les Grecs sont responsables de l'introduction en mathématiques d'une approche de type *dialectique*, qui repose principalement sur la logique déductive, et qui s'intéresse à des questions d'existence. Dans le processus de formalisation des mathématiques qui a dominé le XX^{e} siècle, cette approche dialectique est devenue prépondérante. Mais il existe une autre approche très différente des mathématiques, de type *algorithmique*, qui développe des méthodes de calcul explicite de solutions, ou de leurs approximations. Cette approche est sans doute beaucoup plus répandue à l'échelle de l'humanité. Près de deux mille ans avant J.C., les Babyloniens savaient déjà calculer une dizaine de décimales de la racine carrée de deux. Aujourd'hui, le développement des ordinateurs tend à renforcer l'approche algorithmique au détriment de l'approche dialectique. Quoiqu'il en soit, les études ethnomathématiques ne peuvent se dispenser d'étudier les modalités du raisonnement hypothético-déductif dans le contexte de traditions orales. Or les situations qui permettent une telle étude sont rares, car de nombreux savoirs ne sont pas associés à des verbalisations. Le cas des jeux de stratégie constitue une exception. Le principe même de la succession des coups alternant entre les deux joueurs fournit un cadre propice pour la déduction et l'anticipation qui forment la base de leurs stratégies.

On étudiera dans ce chapitre un jeu appelé awélé, qui est le jeu de semailles répandu sur tout le continent africain. Plusieurs études ethnomathématiques ont été consacrées à ce jeu et à ses propriétés formelles. Par exemple, Ron Eglash a montré que certaines successions de coups pouvaient être modélisées par un automate cellulaire à une dimension, et que cette analyse faisait apparaître des configurations stables (qui se reproduisent indéfiniment), ou des configurations alternant périodiquement. Il est possible que les joueurs experts africains aient plus ou moins conscience de ces propriétés, et qu'ils s'en servent dans leur stratégie. Mais ce point ne peut être véritablement acquis que si l'on effectue une enquête de terrain pour recueillir les raisonnements des joueurs sur leur pratique. Il se trouve que de telles enquêtes ont commencé à se développer, notamment dans les travaux de psychologie inter-culturelle menés par Jean Retschitzki. On décrira certains résultats de cette étude, notamment concernant les fins de partie, qui mettent en évidence de véritables chaînes de déduction logique assez longues et complexes.

Démonstration et raisonnement logique

L'une des caractéristiques des mathématiques occidentales est l'usage généralisé de la *démonstration logique*, au point que l'on considère parfois qu'il n'y a pas de mathématiques hors du schéma hypothèse-déduction-conclusion propre à la démonstration. Ce point de vue tend à reléguer au second plan la notion d'*algorithme* — suite d'opérations reproductibles sans ambiguïté dans différents contextes — qui est pourtant plus ancienne et plus universelle. Quoi qu'il en soit, il est intéressant de se demander si, et comment, le schéma hypothético-déductif est pratiqué dans les sociétés de tradition orale. En d'autres termes, les mécanismes cognitifs mis en oeuvre dans les sociétés que l'on qualifiait jadis de « primitives », sont-ils de nature différente des nôtres ?

Cette question appartient aujourd'hui au champ des *sciences cognitives.* Plus précisément, elle concerne les recherches interculturelles qui au sein de celles-ci se sont développées durant les dernières décennies. De telles recherches ont jusqu'à présent beaucoup porté sur le problème de la déduction syllogistique. Voici un exemple en forme de « dialogue de sourds »[1] :

– *L'enquêteur :*
Tous les Kpelle cultivent le riz.
M. Smith ne cultive pas le riz.
Question : M. Smith est-il un Kpelle ?
– *L'indigène :*
Je ne connais pas M. Smith, je ne l'ai jamais vu.

L'analyse de ce dialogue classique a conduit à diverses interprétations, mais la thèse de l'incapacité des sujets à maîtriser la déduction syllogistique ne semble plus guère défendue. En revanche, l'importance de la différence culturelle entre l'enquêteur et l'enquêté est mieux prise en compte, et l'on évalue plus justement la distorsion qu'elle introduit dans le déroulement de l'enquête[2]. Ce qui était parfois perçu comme illogique est aujourd'hui plus prudemment considéré comme incomplet, c'est-à-dire comme faisant référence à des propositions sous-entendues dont l'absence empêche de saisir la logique du discours.

Les jeux de stratégie

Les jeux de stratégie fournissent un cadre propice à l'étude des mécanismes de raisonnement. En effet, les jeux de ce type se déroulent à l'intérieur d'un univers abstrait de cases et de pions en marge du monde réel, avec des règles de fonctionnement explicites. Ils incluent dans leur principe même la notion de séquentialité (alternance régulière de coups) qui leur donne des affinités avec le schéma linéaire du raisonnement déductif (« si je joue ça, il se passe ça »).

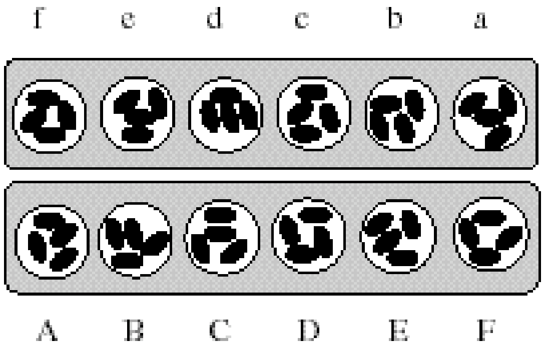

Figure 3.1. Le tablier de l'awélé, avec six cases dans chaque camp.

L'Afrique est le continent d'un jeu aussi passionnant et raffiné que les échecs ou le go, appelé « jeu des semailles ». Il se présente sous la forme d'un tablier creusé de trous dans lesquels sont distribuées des graines. Il en existe une grande variété, que l'on regroupe en deux types : les jeux de type *wari* dont le tablier comporte deux rangées de cases et qui sont

1. Pascal Boyer, « Tradition et vérité », *L'Homme*, xxvi, 1986, p. 309-329.
2. S. Scribner, Modes of Thinking and Ways of Speaking. Culture and Logic Reconsidered, P. N. Johnson-Laird & P. C. Watson (éds.), *Thinking, Readings in Cognitive Science*, Cambridge, Cambridge University Press, 1977, p. 483-500.

largement répandus en Afrique occidentale ; et les jeux de type *solo* à trois ou quatre rangées de cases, qui sont pratiqués principalement en zone bantou[3]. Les Nzakara de République centrafricaine, par exemple, que l'on retrouvera au chapitre V, jouent à un jeu de type *solo* qu'ils appellent *a-ngu*^{n}*là* (quatre rangées de huit cases contenant initialement deux graines par case).

Le plus connu des jeux de semailles est l'awélé. C'est un jeu de type *wari*, comportant deux rangées de six cases contenant initialement quatre graines par case. Un coup consiste à prendre le contenu d'une case de son camp (la rangée placée de son côté) et à tourner dans le sens anti-horaire en distribuant les graines à raison d'une graine par case. Il y a prise quand un coup se termine dans une case du camp adverse dont le contenu est porté à deux ou trois graines. Dans ce cas, on récolte le contenu de cette case, ainsi que celui de toutes les cases précédentes du camp adverse qui contiennent également deux ou trois graines. La partie se termine quand il ne reste plus assez de graines en jeu pour permettre des prises, ou bien quand un joueur n'a plus de graine dans son camp sans que l'adversaire puisse jouer un coup qui lui en redonne. Dans ce cas, il prend l'une des graines restantes, dite « graine de soulagement », et l'adversaire prend toutes les autres. Le gagnant est celui qui a récolté le plus de graines.

Par exemple, considérons la succession théorique de coups suivante commençant par Nord à partir de la position initiale du jeu. Par convention, on notera par des majuscules les cases de Sud, et par des minuscules celles de Nord (de la gauche vers la droite pour chacun des joueurs). Ainsi, la succession de coups ci-dessous s'écrit « dFaE ».

4 4 4 4 4 4
4 4 4 4 4 4

5 5 0 4 4 4
5 5 4 4 4 4

5 5 1 5 5 5
4 4 4 4 4 0

0 5 1 5 5 5
5 5 5 5 5 0

0 5 2 6 6 6
5 5 5 5 0 1

On voit que dans la case « d » du camp adverse, Sud capture deux graines au bout de quatre coups.

Un jeu peut être représenté par un graphe, dont les sommets sont les états possibles du jeu, et les transitions correspondent aux coups permettant de passer d'un état à un autre[4]. Évidemment, pour des jeux comme les échecs ou le go, le nombre de sommets du graphe est considérable. Ce paramètre donne une indication sur la complexité du jeu, car il permet de se faire une idée du nombre de situations qu'il faudrait idéalement pouvoir envisager pour déterminer une stratégie gagnante.

Théoriquement, un ordinateur qui pourrait stocker l'intégralité du graphe d'un jeu deviendrait imbattable. Mais on sait que pour les échecs ou le go, cette limite théorique est loin d'être atteinte, et les programmes d'ordinateur qui jouent à ces jeux se contentent de manipuler des sous-ensembles du graphe, et de calculer des fonctions d'évaluation sur les

3. André Deledicq & Assia Popova, *Wari et solo. Le jeu de calculs africain*, Paris, CEDIC, 1977.
4. Le livre de J.H. Conway (*On Numbers and Games*, Academic Press, 1976) est la référence la plus moderne sur la théorie des jeux.

sommets. Il y a une dizaine d'années, les progrès effectués dans ce domaine ont fait l'objet d'une forte campagne de médiatisation, lorsque l'ordinateur Deep Blue de la firme IBM a affronté le champion du monde d'échecs Garry Kasparov.

C'était le 10 février 1996 à Philadelphie. Garry Kasparov, joueur le mieux classé de tous les temps, perdait une partie face à Deep Blue. Il était le premier champion du monde d'échecs battu par un ordinateur. Il se vengea dans les parties suivantes, et le score final de cet affrontement sur six parties tourna à son avantage : une partie perdue par Kasparov, une gagnée, puis deux nulles, puis deux parties gagnées par Kasparov, soient 4 points contre 2 points.

L'ordinateur Deep Blue fonctionnait avec 256 microprocesseurs travaillant en parallèle, et pouvait calculer 200 millions de positions par secondes, ce qui lui permettait d'essayer tous les coups possibles jusqu'à une profondeur de sept à huit coups. Un nouveau match fût organisé l'année suivante, lorsque diverses améliorations avaient été apportées au programme. Cette fois, l'équilibre basculait au profit de la machine, et le 11 mai 1997 à New-York, Deep Blue battait Kasparov par 3,5 points contre 2,5 points. Le score finale de Kasparov sur six parties, pour cette première défaite de toute sa carrière en match individuel, s'établissait ainsi : une partie gagnée, une perdue, trois nulles, une perdue.

Quelques mois plus tard, IBM annonçait l'arrêt de ce programme de recherche, et la mise hors service de Deep Blue. Le champion russe, qui avait régné sur les échecs plus de dix ans, depuis sa victoire contre Anatoli Karpov en 1985, a réclamé en vain une revanche. Plus récemment, en 2003, il a affronté une version réduite de Deep Blue, appelée Deep Blue Junior (qui ne peut calculer que 3 millions de mouvements à la seconde). Le match a duré deux semaines, et s'est conclu par un score nul 3 points contre 3.

Le jeu de go est considéré comme trop complexe pour laisser une chance à la machine. Alors que les échecs comportent 64 cases, il y a 361 intersections dans le go. Sa combinatoire est telle qu'il faudra sans doute attendre encore longtemps avant qu'un programme informatique ne puisse le maîtriser.

L'awélé se situe à un niveau de complexité comparable aux échecs et au go (c'est-à-dire bien supérieur aux dames par exemple), mais il est sans doute le moins complexe des trois. En 2002, deux chercheurs informaticiens néerlandais, John W. Romein et Henri E. Bal, annonçaient « qu'ils avaient résolu l'awélé », c'est-à-dire qu'ils étaient parvenus à représenter informatiquempent l'intégralité du graphe du jeu, en utilisant un ordinateur travaillant avec 144 processeurs parallèles[5]. Le nombre de sommets du graphe, c'est-à-dire le nombre de positions de jeu possibles qu'ils ont réussi à stocker, est égal à 889.063.398.406, soit de l'ordre de 10^{12}. Leurs travaux montrent en particulier que l'awélé se termine nécessairement par un match nul si les deux joueurs jouent de façon optimale, ce qui confirme l'intérêt de ce grand jeu de stratégie, qui n'est pas biaisé en quelque sorte, c'est-à-dire qui ne donne pas un avantage irréductible à l'un des joueurs (ni celui qui commence la partie, ni l'autre).

Le livre du capitaine Robert S. Rattray

L'un des premiers ouvrages d'ethnographie décrivant les régles de l'awélé est celui du capitaine Robert S. Rattray (1881-1938). Cet anthropologue « officiel » du gouvernement britannique au début du XX[e] siècle a travaillé longtemps au Ghana (ancienne Gold Coast), où il était chargé par les autorités coloniales d'aider à prévenir de nouveaux conflits avec les Ashanti. Sa carrière avait commencé comme militaire en Afrique du sud, avant l'âge de vingt ans. Démobilisé en 1902, il était parti au service de l'African Lake Corporation, en Afrique centrale britannique (actuel Malawi), où son penchant pour la chasse l'avait conduit sur la

5. John W. Romein & Henri E. Bal, « Solving the game of Awari with parallel retrograde analysis », *IEEE Computer* 36 (10), 2003, p. 26-33.

piste des éléphants. Il était ensuite arrivé dans ce qui est aujourd'hui le Ghana, à une époque où les relations avec les Ashanti étaient encore tendues, après les guerres de 1873-74, et son intérêt s'était alors porté vers l'étude de leur langue et de leur culture. Lors de l'Exposition de l'Empire Britannique en 1924 à Wembley, il avait été chargé de mettre en place un pavillon consacré aux Ashanti.

Son livre *Religion and Art in Ashanti*, Oxford, The Clarendon Press, 1927 est le deuxième d'une série de trois volumes (les deux autres sont *Ashanti* paru en 1923, et *Ashanti law and constitution* paru en 1929). Il contient un chapitre intitulé « Wari » consacré à la description de l'awélé. Comme d'autres chapitres du livre, il n'est pas rédigé par Rattray lui-même, mais par G.T. Bennett, de Cambridge, à qui Rattray avait appris les régles du jeu lors de l'exposition de Wembley. Le texte de Bennett a été la source de beaucoup d'autres études sur l'awélé, et reproduit d'innombrables fois. Outre les régles, il donne également des informations sur les stratégies du jeu.

Dans les fins de partie, Bennett définit ce qu'il appelle un « mouvement lent ». Lorsqu'il ne reste plus beaucoup de graines en jeu, le joueur a intérêt à garder le plus possible de graines de son côté, et à en laisser le moins possible du côté de l'adversaire. Un mouvement lent consiste alors à répartir les graines de son camp dans le plus de cases possibles, et à jouer toujours la case qui a le moins de graines. Bennett donne l'exemple suivant :

0 0 0 0 0 0
3 0 0 0 0 1

Sud doit donner une graine à Nord, c'est-à-dire jouer « F », puis Nord joue « a ». Ensuite, Sud joue la case « A » avec trois graines, et Nord joue « b » :

0 0 0 1 0 0
0 1 1 1 0 0

Dès lors, Sud joue le mouvement lent suivant : « DcCdBeC ». Ainsi, il garde toutes ses graines de son côté.

1 0 0 0 0 0
0 0 0 2 1 0

Nord est obligé de jouer « f », et n'a plus de graines. Sud n'étant pas en mesure de lui en donner, la partie s'arrête et Sud ramasse les quatre graines. Bennett conclut en disant que « tout autre mouvement rendrait impossible la capture de ces quatre graines ».

Une autre notion introduite par Bennett est celle de « groupe de marche ». Il définit ainsi une succession de n cases consécutives dont les nombres de graines sont décroissants de n jusqu'à 1, c'est-à-dire n, $n-1$, … 2, 1. Une telle configuration a la propriété de se déplacer vers la droite sans se modifier quand on joue la case de gauche. Par exemple, dans le groupe de marche 4 3 2 1, si l'on joue la case contenant quatre graines, celles-ci sont réparties dans les cases suivantes, et on obtient la même configuration 4 3 2 1 déplacée d'une case vers la droite. Bennett indique que le groupe de marche 2 1, avec deux cases, est utile lorsque l'adversaire n'a pas de graines à gauche de son camp, car en le déplaçant jusqu'au camp adverse, il permet de gagner deux graines. L'exemple qu'il donne met en jeu plusieurs groupes de marche successifs de ce type :

0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 2 1

Sud déplace le premier groupe de marche en jouant « E » :

0 0 0 0 0 1
0 1 1 1 0 2

puis la succession « aF » permet à Sud de prendre deux graines. Ensuite, Sud peut reconstituer un nouveau groupe de marche en jouant « aDbCcBdCe » :

1 0 0 0 0 0
0 0 0 2 1 0

Puis Sud déplace le nouveau groupe de marche deux fois jusque dans le camp adverse, et prend deux graines comme précédemment « DfEaF » :

0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0

Nous allons voir que ces notions introduites par Bennett donnent lieu à des propriétés mathématiques intéressantes, qui seront étudiées dans la suite de ce chapitre. Mais du point de vue adopté dans ce livre, qui consiste à relier propriétés mathématiques et modes de penser locaux, il manque un maillon entre le texte de Bennett et les conceptions des indigènes qui pratiquent ce jeu. En effet, Bennett ne donne pas d'indications sur les conditions dans lesquelles les informations qu'il présente ont été recueillies sur le terrain (par exemple, on ne dispose d'aucun terme vernaculaire désignant les notions telles que « groupe de marche » ou « mouvement lent »). Les exemples analysés ci-dessus sont-ils des extraits de parties observées chez les Ashanti ? Peuvent-ils être considérés comme des « cas d'école » décrits par des experts indigènes ? Dans une certaine mesure, il est possible que Bennette ait imaginé ces situations lui-même, en explorant le jeu, comme il le laisse entendre dans son introduction : « Après un peu d'expérience dans la pratique du jeu, on verra que les éléments décrits ici constituent une petite partie des considérations très complexes qui déterminent les meilleurs mouvements »[6]. Rappelons également que Bennett n'a pas, semble-t-il, effectué d'enquête sur le terrain lui-même, son travail étant basé sur les données collectées par Rattray.

Groupes de marche et automates cellulaires

Ron Eglash a montré comment on peut modéliser les groupes de marche de l'awélé sous la forme d'automates cellulaires[7]. Les mathématiciens étudient ce modèle abstrait de croissance en définissant un ensemble de petites cellules disposées en quadrillage, dont l'état évolue dans le temps en fonction des cellules voisines[8]. L'automate est à deux dimensions si le quadrillage se déploie à la fois verticalement et horizontalement. Il est à une dimension si les cellules sont disposées sur une seule ligne. « L'état » de chaque cellule est un nombre entier pouvant prendre k valeurs comprises entre 0 et $k - 1$. On considère souvent des automates cellulaires ayant seulement deux états 0 ou 1, dont les cellules sont alors représentées graphiquement par des carrés noirs (1) ou blancs (0).

6. G.T. Bennett, « Wari », in Capt. Robert S. Rattray, *Religion & art in Ashanti*, Oxford, The Clarendon Press, 1927.
7. Ron Eglash, « L'algorithmique ethnique », *Pour la science*, dossier 47, 2005, p. 102-104.
8. Stephen Wolfram, « Cellular automata as models of complexity », *Nature* 311, 1984, p. 419-424.

Un exemple d’automate cellulaire avec des cellules à deux états (noir ou blanc) est le modèle célèbre, inventé par Conway, qui est connu sous le nom de « jeu de la vie ». Il doit cette appellation à l'aspect particulier que prend son évolution (dont on ne voit ici qu'une étape), au cours de laquelle apparaissent des petites formes qui croissent, puis explosent, d'autres qui se déplacent en s’auto-reproduisant (on les appelle des « glisseurs »), d'autres encore qui se regroupent avec d'autres formes. Certaine formes sont stables c'est-à-dire qu'elles restent immobiles d'une étape à l'autre, comme le petit carré de quatre cellules noires dont on trouve plusieurs exemplaires dans le tableau (par exemple en haut au milieu, légèrement décalé à droite). D’autre formes alternent indéfiniment deux configurations, comme le petit tiret dont on trouve deux exemples dans le quart supérieur gauche du tableau, et qui apparaît soit horizontalement, soit verticalement. Au cours de son évolution, l'automate a tendance à se maintenir dans une répartition relativement raréfiée, les cellules noires restant nettement minoritaires par rapport aux cellules blanches.

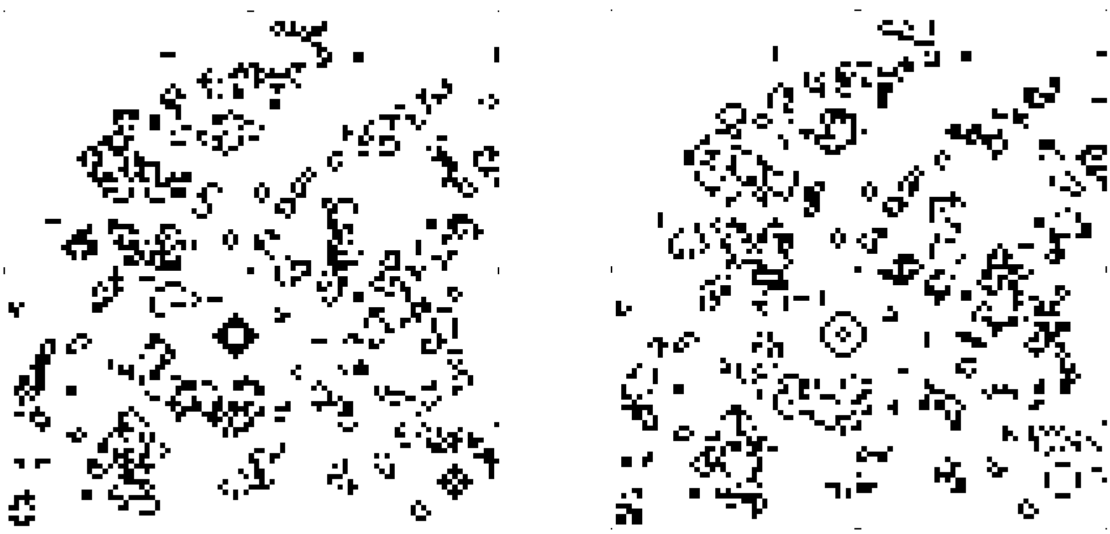

Figure 3.2. Deux étapes consécutives de l’évolution du jeu de la vie, l’un des automates cellulaires les plus célèbres.

Le choix des cellules voisines déterminant l'évolution du système dépend du modèle d’automate cellulaire considéré, et il est responsable des aspects très différents que prend celui-ci au fil de ses transformations successives. Dans le cas du jeu de la vie, l'état d’une cellule à l'étape ultérieure dépend de l'état de neuf cellules formant un carré centré autour de cette cellule, et constitué de la cellule elle-même et de ses huit voisines. La règle s'énonce ainsi :

(1) Si la cellule considérée est noire, elle ne peut rester noire que si parmi ses huit voisines deux ou trois sont noires.
(2) Si elle est blanche, elle ne peut rester blanche que si elle n'a pas trois voisines noires.

Les mouvements des groupes de marche de l’awélé, ou d’autres configurations de graines similaires (c’est-à-dire réparties dans des cases consécutives, et déplacées par répartition de la case la plus à gauche), sont modélisables sous la forme d’un automate cellulaire à une dimension. Si k est le nombre de graines de la configuration étudiée, l’état d’une cellule de l’automate cellulaire ne dépend que des états d’au plus k cellules voisines, situées à sa gauche. On peut énoncer la règle ainsi :

(1) Si les k voisines de gauche de la cellule considérée sont nulles, elle devient nulle à l'étape suivante (qu'elle soit elle-même nulle ou pas).
(2) Si parmi ses k voisines à gauche, on trouve une série de cellules consécutives non nulles, et si la plus à gauche d'entre elles est dans un état supérieur à la distance qui la sépare de la cellule considérée, alors l'état de cette cellule augmente d'une unité à l'étape suivante.

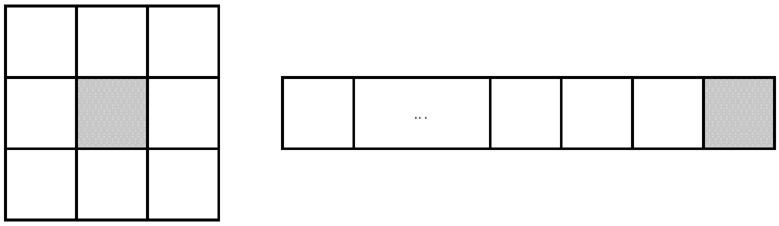

Figure 3.3. Voisinages considérés dans les règles d'évolution d'automates cellulaires, pour le jeu de la vie à gauche, et pour les groupes de marche de l'awélé à droite.

Du point de vue de la théorie des automates cellulaires, les groupes de marche de l'awélé sont un exemple de configurations *auto-reproductrices*. D'autres configurations ont un comportement qui les amène à converger vers un groupe de marche. Ron Eglash donne l'exemple suivant :

3 4 2 1 -> 5 3 2 -> 4 3 1 1 1 -> 4 2 2 2 -> 3 3 3 1 -> 4 4 2 -> 5 3 1 1 -> 4 2 2 1 1 -> 3 3 2 2 -> 4 3 3 -> 4 4 1 1 -> 5 2 2 1 -> 3 3 2 1 1 -> 4 3 2 1

La règle de déplacement des figures peut aussi conduire à des comportements périodiques. La séquence suivante est un exemple de période 3 :

2 1 1 -> 2 2 -> 3 1 -> 2 1 1.

Comme l'ensemble des formes que peut prendre une figure donnée lors de ses déplacements est fini, on retombe nécessairement à un certain moment sur une forme déjà vue précédemment. Dès lors, les déplacements ultérieurs adopteront un comportement périodique, qui constitue une sorte de cycle limite de la figure initiale, et qui apparaît après un premier épisode transitoire. On montre que la période du régime périodique dépend du nombre de graines contenues dans la figure, et les valeurs correspondantes sont regroupées dans le tableau ci-après. Par exemple, la figure 3 4 2 1 contient dix graines, et le tableau indique que son régime périodique est de période un, c'est-à-dire qu'elle converge nécessairement vers un groupe de marche, ce qui confirme le constat fait précédemment.

Nombre de graines	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Périodes possibles	1	2	1	3	3	1	4	4, 2	4	1	5	5	5

Tableau 3.1. Périodes des configurations de l'awélé en fonction de leur nombre de graines.

Groupes de marche augmentés et figures périodiques

L'article de Ron Eglash, paru dans le numéro spécial d'avril 2005 du magazine *Pour la science* consacré aux « Mathématiques exotiques », présentait son analyse des groupes de marche de l'awélé sous la forme d'automates cellulaires. Cet article a eu un effet de catalyseur en donnant naissance à plusieurs études de chercheurs mathématiciens ou informaticiens consacrées aux propriétés des groupes de marche et des figures périodiques de ce jeu. L'une des belles réussites dans ce domaine est un joli résultat établi par André Bouchet qui montre que les figures périodiques de l'awélé sont exactement les positions qui sont « prises en sandwich » entre deux groupes de marche dont les nombres de cases sont deux entiers consécutifs.

André Bouchet définit ce qu'il appelle un « groupe de marche augmenté »[9]. Il s'agit d'une figure obtenue à partir d'un groupe de marche, en ajoutant une graine dans certaines cases, ou éventuellement dans la case à droite de la dernière case du groupe. Si l'on rajoutait exactement une graine dans toutes les cases ainsi définies (celles du groupe de marche, plus une case supplémentaire à droite de la dernière), on obtiendrait précisément le groupe de marche dont le nombre de cases est immédiatement supérieur au précédent. En ce sens, on peut dire qu'un groupe de marche augmenté, au sens de Bouchet, est strictement compris entre deux groupes de marche dont les nombres de cases sont des entiers consécutifs, et qui le prennent « en sandwich ».

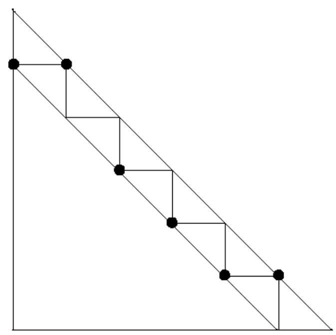

Figure 3.4. Le « groupe de marche augmenté » 5 5 3 2 1 1 est pris en sandwich entre les deux groupes de marche 5 4 3 2 1, et 6 5 4 3 2 1, de cinq et six cases respectivement.

Le résultat de Bouchet consiste à affirmer que *les figures périodiques de l'awélé sont exactement les groupes de marche augmentés*. Il est facile de voir qu'une telle figure est périodique. Par définition des groupes de marche augmentés, cette figure « contient » un groupe de marche sous-jacent, auquel on a ajouté une graine dans certaines cases. Lorsqu'on joue la case de gauche de cette figure, on reconstitue, à une case de distance vers la droite, une nouvelle figure qui contient, elle aussi, un groupe de marche sous-jacent avec une graine supplémentaire dans certaines cases. Or si l'on considère la séquence de zéro et de un indiquant la présence ou l'absence de cette graine supplémentaire, on observe que lors de ce déplacement, la séquence subit exactement une permutation circulaire d'un élément, c'est-à-dire que son premier élément est placé à la fin. En conséquence, en réitérant le processus, tous les éléments de cette séquence vont être déplacés à la fin les uns après les autres, et on reviendra à la séquence initiale. Par exemple, pour la figure périodique 5 5 3 2 1 1, on obtient les déplacements suivants :

5 5 3 2 1 1 -> 6 4 3 2 2 -> 5 4 3 3 1 1 -> 5 4 4 2 2 -> 5 5 3 3 1 -> 6 4 4 2 1 -> 5 5 3 2 1 1.

Le groupe de marche sous-jacent est 5 4 3 2 1. Pour la séquence de zéro ou un" indiquant les graines additionnelles de la figure, on obtient les permutations circulaires suivantes :

9. André Bouchet, « Owari I. Marching Groups and Periodical Queues », manuscrit, 2005.

0 1 0 0 0 1 -> 1 0 0 0 1 0 -> 0 0 0 1 0 1 -> 0 0 1 0 1 0 -> 0 1 0 1 0 0 -> 1 0 1 0 0 0 -> 0 1 0 0 0 1.

Ce principe permet de calculer les valeurs du tableau précédent donnant les périodes possibles en fonction du nombre de graines.

Il est plus difficile de montrer que toute figure périodique est nécessairement un groupe de marche augmenté. La preuve de Bouchet a été simplifiée par un chercheur de l'université de Grenoble, Henning Bruhn, qui a également étendu le résultat[10]. L'idée est de considérer, à partir d'une figure périodique donnée, le groupe de marche le plus grand possible qui « minore » cette figure, c'est-à-dire tel que toutes ses cases aient moins de graines que les cases correspondantes de la figure. Plus précisément, on considère tous les déplacements possibles de la figure, et on prend le déplacement qui donne le plus grand groupe de marche minorant. On montre alors que ce groupe de marche minore également la figure périodique elle-même. Dès lors, on considère les différences entre les nombres de graines des cases de la figure périodique, et de celles du groupe de marche minorant. On voit facilement que l'une de ces valeurs au moins est nulle, sinon on pourrait choisir le groupe de marche minorant de telle sorte qu'il soit plus grand. Un raisonnement serré, dont on ne peut reproduire le détail ici, permet de montrer en utilisant la périodicité de la figure, c'est-à-dire le fait qu'elle revient dans son état initial après plusieurs déplacements, que ces nombres ne peuvent prendre comme valeurs que zéro ou un. Il en résulte que la figure périodique est nécessairement un groupe de marche augmenté.

Positions déterministes dans les fins de partie

D'autres résultats mathématiques intéressants concernant l'awélé ont été obtenus en 2002 par Duane M. Broline et Daniel E. Loeb. Ces chercheurs se sont intéressés à des situations de fin de partie qu'ils appellent « positions déterministes »[11]. Il s'agit d'une position telle que

(1) Sud peut capturer des graines à chaque coup,
(2) Nord n'a qu'une seule graine de son côté à chaque coup,
(3) toutes les graines, sauf une, sont finalement capturées par Sud.

Notons que le groupe de marche 2 1 à deux cases, lorsqu'il est placé à cheval entre Sud et Nord comme on l'a vu dans l'exemple de Bennett plus haut, permet à Sud de prendre deux graines, et constitue de ce fait une position déterministe, au sens de Broline et Loeb.

Dans une position déterministe, la graine de Nord est nécessairement dans la case « a » si c'est à Nord de jouer, et la case « b » si c'est à Sud de jouer. En effet, quand Sud doit jouer, il faut qu'il effectue une prise, en ne laissant qu'une seule graine dans le camp de Nord. Cela implique que la graine de Nord soit en position « b », et que Sud termine sa répartition dans cette case pour qu'il y ait capture. Sud prend alors le contenu de « b », et laisse une graine en « a ».

On voit donc que pour être « jouable », c'est-à-dire respecter les conditions de la définition ci-dessus, la case jouée par Nord ou Sud doit être telle qu'après semage, on s'arrête dans la case « b ». Pour Nord, il s'agit de la case « a ». Pour Sud, les cases possibles sont « F » si elle contient deux graines, « E » si elle en contient trois, « D » si elle en contient quatre, etc.

Broline et Loeb donnent l'exemple suivant :

10. Henning Bruhn, « Periodical states and marching groups in a closed owari », manuscrit, 2005.
11. Duane M. Broline & Daniel E. Loeb, « The Combinatorics of Mancala-Type Games : Ayo, Tchoukaillon, and $1/\pi$ », manuscrit, 2002.

0 0 0 0 1 0
0 0 0 4 2 2

C'est à Sud de jouer, et la succession de coups « FaDaEaF » lui permet de prendre huit graines, et d'en laisser une dans le camp adverse en position « a ».

On voit dans cet exemple qu'au départ, Sud avait deux cases « jouables » « F » ou « D ». Mais s'il avait joué « D », la case « F » aurait reçu trois graines, et aurait donc entraîné le placement de plusieurs graines dans le camp adverse lors d'un coup ultérieur. On ne serait plus alors dans une position déterministe. Une conséquence de la définition des positions déterministes est que parmi les cases « jouables », c'est-à-dire dont le nombre de graines leur permettent de terminer le semage dans la case « b », il faut jouer celle qui a le moins de graines, si on veut que le jeu reste dans une position déterministe.

On montre ainsi qu'il n'existe qu'une seule manière possible de passer d'une position déterministe à s graines à une position déterministe à $s + 1$ graines. Elle consiste à procéder de la manière suivante :

- on choisit la case vide la plus proche de la case « b » en tournant dans le sens horaire, et on la remplit avec un nombre de graines égal à la distance qui la sépare de « b » (une pour « a », deux pour « F », trois pour « E », etc.) de manière à en faire une case « jouable »,
- on enlève une graine à toutes les cases qui sont entre elle et « b ».

Par construction, cette nouvelle case sera la case « jouable » ayant le moins de graines, donc celle qui doit être jouée (par Nord si c'est « a », ou Sud dans les autres cas). Or en semant cette case, on reconstituera la position déterministe comportant s graines dont on était parti. Il en résulte par induction que pour chaque valeur de s, il existe une seule position déterministe ayant exactement s graines. Broline et Loeb en déduisent le tableau suivant. Les lignes impaires correspondent au cas où c'est à Nord de jouer, les lignes paires au cas où c'est à Sud (la graine de Nord est alors en position « b », mais elle n'est pas comptée dans la somme).

Somme	A	B	C	D	E	F	a
1							1
2						2	
3						2	1
4					3	1	
5					3	1	1
6				4	2		
7				4	2		1
8				4	2	2	
9				4	2	2	1
10			5	3	1	1	
11			5	3	1	1	1
12		6	4	2			
13		6	4	2			1

Tableau 3.2. Positions déterministes en fonction du nombre de graines.

Broline et Loeb ont observé la courbe des valeurs du nombre minimal de graines possibles dans une position déterministe comportant n cases. Par exemple, pour cinq cases (C D E F a), la plus petite position déterministe contient dix graines. Ils notent $s(n)$ ce nombre minimal de graines en fonction du nombre n de cases, et les premières valeurs sont $s(1) = 1$,

$s(2) = 2$, $s(3) = 4$, $s(4) = 6$, $s(5) = 10$, $s(6) = 12$. Bien que cela n'ait pas de sens dans le cas de l'awélé, dont le nombre de cases est fixe et égal à douze, ils se sont intéressés au comportement de $s(n)$ quand n devient très grand. Ils obtiennent alors une formule décrivant ce comportement asymptotique :

$$s(n) \sim n^2/\pi$$

qui provoque le genre d'apparition totalement inattendue dont les mathématiques ont le secret, en faisant intervenir le nombre pi.

Explications d'un expert sur les fins de partie

Dans une étude de psychologie interculturelle, Jean Retschitzki s'est intéressé aux processus cognitifs mis en oeuvre par les joueurs d'awélé. Il a mené entre autres une enquête auprès de certains des meilleurs joueurs de la Côte d'Ivoire, en les interrogeant plus particulièrement sur les fins de parties. Voici une situation de fin de partie proposée aux joueurs, avec trait à Sud[12] :

0 0 1 1 1 1 (1)
1 1 1 0 0 0

Un expert ivoirien fait l'analyse suivante : la situation conduit à

1 3 0 0 0 0 (2)
0 0 0 0 0 3

avec trait à Nord, puis Nord prend deux graines. Comment fait-il ? Et d'abord, pourquoi Nord prend-il deux graines une fois arrivé en (2) ? Le trait est à Nord qui joue :

0 3 0 0 0 0
1 0 0 0 0 3

Sud a alors deux possibilités : ou bien il joue sa case de gauche « A » mais la graine est aussitôt prise par Nord ; ou bien il joue sa case de droite « F » mais cela ne fait que reculer l'obstacle, car il donne des graines dans le camp de Nord qui va les jouer en attendant que Sud joue sa case de gauche. Dans tous les cas, l'expert ivoirien a raison : Nord prend deux graines. Il reste à savoir comment on arrive à la situation (2). Si Sud n'effectue que des déplacements d'une seule graine à la fois, il arrive à la situation prédite par l'expert en 3+4+5=12 coups. Dans ce cas, Nord effectue un parcours similaire en 2+2+3+4=11 coups, donc à l'arrivée en (2), c'est à Nord de jouer. Mais pourquoi donc Sud effectuerait-il son déplacement de cette manière ? Sans doute parce que c'est le mode de déplacement qui retarde le plus longtemps possible le moment où Sud doit placer des graines dans le camp de Nord. L'expert applique peut-être à Sud une règle stratégique du type : *dans une fin de partie, éviter le plus possible de placer des pions dans le camp adverse*. Si on ne respecte pas cette règle en effet, on offre à l'adversaire plus de choix de coups, c'est-à-dire plus de mobilité. Les travaux de Jean Retschitzki montrent que les joueurs d'awélé mettent en oeuvre des processus cognitifs complexes, constitués pour une part de connaissances mémorisées en accumulant les expériences, mais aussi de raisonnements de type déductif appliqués à ces connaissances.

12. Jean Retschitzki, *Stratégies des joueurs d'awélé*, Paris, L'Harmattan, 1990, p. 197.